P 92

INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE
ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ÉLÈVES TITULAIRES STATISTICIENS ÉCONOMISTES
A L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE

Mai 1984. — Option MATHÉMATIQUES

TROISIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 2 heures

PRÉLIMINAIRE

Soit une suite réelle $(u_n)_{n \geqslant n_0}$; si la série de terme général u_n converge on note S_N la somme partielle :

$$S_N = \sum_{n=n_0}^{N} u_n$$

et R_N le reste :

$$R_N = S - S_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n .$$

Rappeler, succinctement, comment est majoré, en fonction de $|u_{N+1}|$, la valeur absolue de R_N lorsque la convergence de la série est assurée par la règle de d'Alembert (concernant, pour n supérieur ou égal à $N+1$, une majoration du rapport $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$).

Pour une série alternée quelle propriété, simple, sur la suite $(|u_n|)_{n \geqslant N+1}$ permet de mieux encadrer le reste R_N ?

***

Pour n entier naturel et x réel on pose : $u_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{(n!)^3}$. u'_n, u''_n, ... sont les dérivées de u_n. On sait que la série entière de terme général $u_n(x)$ est indéfiniment dérivable pour tout x. On a donc :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \; ; \qquad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x) \; ; \qquad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} u''_n(x) \text{ etc.}$$

I

1° Expliciter $S_n(x)$ et ses trois premières dérivées; la valeur absolue de chaque coefficient sera donnée comme inverse d'un entier.

2° Pour x négatif quels sont les signes de $S'(x)$, $S''(x)$ et le sens de variation de S ?

3° Calculer les meilleures valeurs décimales approchées à 10^{-6} près de $u_n(-5)$ et de $u'_n(-5)$ pour $1 \leqslant n \leqslant 5$ (disposer les résultats dans un seul tableau).

En déduire $S_4(-5)$ et $S'_4(-5)$ puis un encadrement de $S(-5)$ et de $S'(-5)$ tenant compte des erreurs de calcul et de l'erreur de méthode, encadrement qu'on arrondira à 10^{-4}.

II

1° Justifier, pour des valeurs positives de x qu'on précisera soigneusement, les deux inégalités :

$$S'_3(x) \leqslant S'(x) \leqslant S'_2(x)$$

et

$$S''_3(x) \leqslant S''(x) \leqslant S''_2(x)$$

En déduire que l'équation $S'(x) = 0$ possède, dans l'intervalle $[4, 6]$, une racine unique, notée α.

Dresser le tableau des variations de S dans l'intervalle $[0, 12]$.

2° Reprendre les valeurs numériques de la question I. 3° pour encadrer $S(5)$ et $S'(5)$. L'encadrement de $S'(5)$ étant médiocre, l'améliorer en prenant un terme de plus dans la série.

Déterminer, de même, un encadrement de $S''(5)$ grâce aux $u''_n(5)$ $(2 \leqslant n \leqslant 5)$.

Quel est le signe de $S'''(x)$ sur $[0, 12]$?

3° Utiliser la méthode de Newton (ou méthode de la tangente) au point $x = 5$ pour obtenir une valeur approchée x_0 de α. Peut-on connaître le sens de l'approximation (le signe de $x_0 - \alpha$) ?

On admet que, dans l'application de la méthode de Newton à l'équation $f(x) = 0$ au point $x = a$, la valeur absolue de l'erreur de méthode est majorée par $M_2 \frac{(b-a)^2}{2|f'(a)|}$ où b est tel que la racine soit comprise entre a et b et M_2 est un majorant de $|f''|$ sur (a, b). En déduire un majorant de $|x_0 - \alpha|$.

On résumera les calculs de cette question en donnant un encadrement de α qu'on tronquera à 10^{-2}.

4° Utiliser S (5), déjà calculé, pour encadrer $S(\alpha)$ grâce à la formule de Taylor appliquée au point α.

5° Calculer, sous forme de fraction irréductible, chacun des nombres $S_n(12)$, $S'_n(12)$, $S''_n(12)$ pour $n = 4$ et pour $n = 5$. Connaît-on le signe de S'' sur $[0, 12]$?

6° Tracer la courbe représentative de la fonction S en prenant 1 cm pour unité de longueur sur chaque axe. Aucun autre calcul de S ou de ses dérivées n'est demandé; on ne reportera donc que les points et tangentes en -5, 0, 5, 12.